-۱۷

$$Y = \frac{1}{X_1 X_2 \ldots X_n}$$

$$T = \ln Y = -\sum_{i=0}^{n} \ln X_i = \sum_{i=0}^{n} Z_i \,,\ Z_i = -\ln X_i$$

$$f_{Z_i}(z_i) = \frac{f_{X_i}(e^{-z_i})}{|e^{z_i}|} = e^{-z_i} u(z_i)$$

$$\Phi_T(s) = E\{e^{sT}\} = E\left\{e^{s\sum_{i=0}^{n} Z_i}\right\} = \Pi_{i=0}^{n} E\{e^{sZ_i}\} = \Pi_{i=0}^{n} \Phi_{Z_i}(s) = \left(\Phi_{Z_i}(s)\right)^n = \left(\frac{1}{1-s}\right)^n$$

$$f_T(t) \leftrightarrow \mathcal{L}^{-1}\{\Phi_T(-s)\} \Rightarrow f_T(t) = \frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-t} u(t)$$

$$T = \ln Y \Rightarrow Y = e^T \Rightarrow f_Y(y) = \frac{f_T(\ln y)}{\left|e^{\ln y}\right|} = \frac{1}{(n-1)!} \frac{(\ln y)^{n-1}}{y^2} u(y-1)$$

-۱۸

الف) تخمین گر خطي بهينه بصورت زير خواهد بود .

$$\hat{Y} = m_Y + r_{YX} \frac{s_Y}{s_X}(X - m_X)$$

$$f_X(x) = x + \frac{1}{2} \quad 0 \le x \le 1$$

$$f_Y(y) = y + \frac{1}{2} \quad 0 \le y \le 1$$

$$m_X = m_Y = \frac{7}{12} \qquad E(XY) = \frac{1}{3} \qquad E(X^2) = E(Y^2) = \frac{5}{12}$$

$$\hat{Y} = \frac{7}{12} - \frac{1}{11}\left(X - \frac{7}{12}\right)$$

ب) مقدار متوسط مربع خطای بهينه بصورت زير خواهد بود .

$$P_{\min} = s_Y^2 (1 - r_{YX}^2) = \frac{11}{144} \times \left(1 - \frac{1}{11^2}\right) = 0.0758$$

ج)

$$\hat{Y}=E\,(Y|X=x)=\int_{-\infty}^{+\infty} y\, f(y\,|x)\,dy=\int_{-\infty}^{+\infty} y\,\frac{f_{YX}\,(y,x)}{f_X\,(x)}\,dy$$

$$f_X\,(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{YX}\,(y,x)\,dy=\int_0^1 (x+y)\,dy=x+\frac{1}{2}\qquad 0\le x\le 1$$

پس در نتيجه داريم

$$\hat{Y}=\int_0^1 y\,\frac{x+y}{x+\frac{1}{2}}\,dy=\frac{1}{x+\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{3}\right)$$

د)

در اين قسمت متوسط مربع خطا را حساب مي نماييم :

$$P_{\min}=E_X\ Var\,(Y|X=x)$$

$$Var\,(Y|X=x)=E\,(Y^2|X=x)-E^2(Y|X=x)$$

$$f_Y\,(y\,|\,X=x)=\frac{x+y}{x+\frac{1}{2}}\qquad 0\le y\le 1$$

$$E\,(Y^2|X=x)=\int_0^1 y^2\,\frac{x+y}{x+\frac{1}{2}}\,dx=\frac{1}{x+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}\right)$$

$$E(Y|X=x)=\int_0^1 y\,\frac{x+y}{x+\frac{1}{2}}\,dy=\frac{1}{x+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}\right)$$

$$P_{\min}=\int_0^1\left[\frac{1}{x+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}\right)^2\right](x+\frac{1}{2})\,dx$$

$$=\int_0^1\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}\right)dx-\int_0^1\frac{1}{x+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}\right)^2dx=\int_0^1\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}\right)dx-\frac{1}{4}\int_0^1\frac{1}{x+\frac{1}{2}}\left(x+\frac{2}{3}\right)^2dx$$

$$=\int_0^1\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}\right)dx-\frac{1}{4}\int_0^1\left(x+\frac{5}{6}\right)+\frac{1}{36(x+\frac{1}{2})}\,dx$$

$$=\frac{5}{12}-\frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}+\frac{1}{36}\ln 3\right)=\frac{1}{12}-\frac{1}{144}\ln 3=0.0757$$

-۱۹

$$\hat{Y} = a_1 X_1 + a_2 X_2 \quad , \quad P = E\{(Y-\hat{Y})^2\} = E\{(Y - a_1 X_1 - a_2 X_2)^2\}$$

$$\frac{\partial P}{\partial a_1} = 0 \;\rightarrow\; E\{X_1(Y - a_1 X_1 - a_2 X_2)\} = 0 \;\rightarrow a_1 E\{X_1^2\} + a_2 E\{X_1 X_2\} = E\{X_1 Y\}$$

$$\frac{\partial P}{\partial a_2} = 0 \;\rightarrow\; E\{X_2(Y - a_1 X_1 - a_2 X_2)\} = 0 \;\rightarrow a_2 E\{X_2^2\} + a_1 E\{X_1 X_2\} = E\{X_2 Y\}$$

$$\boxed{\rightarrow \quad \begin{cases} a_1 = \dfrac{E\{X_1 Y\}E\{X_2^2\} - E\{X_2 Y\}E\{X_1 X_2\}}{E\{X_1^2\}E\{X_2^2\} - E\{X_1 X_2\}^2} \\ a_2 = \dfrac{E\{X_2 Y\}E\{X_1^2\} - E\{X_1 Y\}E\{X_1 X_2\}}{E\{X_1^2\}E\{X_2^2\} - E\{X_1 X_2\}^2} \end{cases}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} P_{\min} &= E\{(Y - a_1 X_1 - a_2 X_2)(Y - a_1 X_1 - a_2 X_2)\} = E\{Y(Y - a_1 X_1 - a_2 X_2)\} - 0 - 0 \\ &= E\{Y^2\} - a_1 E\{YX_1\} - a_2 E\{YX_2\} \end{aligned}}$$

۲۰- با استفاده از جدول صورت سوال:

x	0	1
$p_X(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

y	0	1
$p_Y(y)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

x	0	0	1	1
y	0	1	0	1
$p_{XY}(x,y)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$

x	0	0	1	1
z	0	1	0	1
$p_{XZ}(x,z)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$

y	0	0	1	1
z	0	1	0	1
$p_{YZ}(y,z)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{15}{100}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{45}{100}$

الف) چون به‌ازاي جميع مقادير x و y داريم $p_{XY}(x,y)=p_X(x)p_Y(y)$ ، بنابراين X و Y مستقل هستند.

ب) به دليلي مشابه بند الف داريم Z و Y مستقل هستند.

پ) چون مثلاً به ازاي $x=0\ ,\ z=0$ داريم $p_{XZ}(0,0)\neq p_X(0)p_Z(0)$ ، پس X و Z مستقل نيستند، اگر چه هر دو با Y مستقل‌اند.

ت)

x	0	0	1	1
z	0	1	0	1
$p_X(x\mid z)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$

y	0	0	1	1
z	0	1	0	1
$p_Y(y\mid z)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$

چون مثلاً به ازاي $x=0$ و $y=0$ داريم: $p_{XY}(0,0\mid Z=0)\neq p_X(0\mid Z=0)p_Y(0\mid Z=0)$ به‌شرط دانستن $z=0$ متغيرهاي تصادفي X و Y وابسته مي‌شوند.

-۲۱

چون تابع با ضابطة داده شده نسبت به سه متغير تفكيك‌پذير است، لذا سه متغير تصادفي مستقل از هم هستند:

$$f_{XYZ}(x,y,z)=\begin{cases}8xyz & 0<x,y,z<1\\ 0 & Otherwise\end{cases}=f_X(x)f_Y(y)f_Z(z)$$

$$f_X(x)=\begin{cases}2x & 0<x<1\\ 0 & Otherwise\end{cases}\ ,\ f_Y(y)=\begin{cases}2y & 0<y<1\\ 0 & Otherwise\end{cases}\ ,\ f_Z(z)=\begin{cases}2z & 0<z<1\\ 0 & Otherwise\end{cases}$$

الف) چون X و Y و Z مستقل‌اند، در نتيجه ناهمبسته هستند. بنابراين: $r_{XY}=r_{YZ}=r_{XZ}=0$

ب)

$$f_{XYZ}(x,y,z\mid y+z>1)=\begin{cases}\dfrac{f_{XYZ}(x,y,z)}{\int_{y+z>1}f_{YZ}(y,z)dydz} & \begin{matrix}0<x,y,z<1\\ y+z>1\end{matrix}\\ 0 & Otherwise\end{cases}$$

$$\int_{y+z>1}f_{YZ}(y,z)dydz=\int_{z=-\infty}^{\infty}\int_{y=1-z}^{\infty}f_{YZ}(y,z)dydz=\int_0^1\int_{1-z}^{1}4yz\,dydz=\frac{5}{6}\quad\rightarrow$$

$$\boxed{f_{XYZ}(x,y,z\mid y+z>1)=\begin{cases}9.6xyz & \begin{matrix}0<x,y,z<1\\ y+z>1\end{matrix}\\ 0 & Otherwise\end{cases}}$$

پ) چون Y و Z مستقل از X هستند، پس $Y+Z$ هم مستقل از X است. در نتیجه :

$$\boxed{f_X(x\,|\,Y+Z>1)=f_X(x)}$$

-۲۲

الف) بله، تواماً نرمال هستند، زیرا pdf توأم آن‌ها نمایي با نماي به‌فرم درجة دوم است.

ب)
$$f_{XYZ}(x,y,z)=\frac{1}{2p\sqrt{p}}\exp(-(x^2+y^2+\frac{1}{2}z^2-\sqrt{2}xy)$$

$$f_{XYZ}(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{2p}}\exp(-\frac{1}{2}z^2)\frac{1}{\sqrt{2p^2}}\exp(-x^2-y^2+\sqrt{2}xy)=f_Z(z)\,f_{XY}(x,y)$$

در نتیجه متغیر تصادفي $Z\sim N(0,1)$ از دو متغیر تصادفي دیگر مستقل است. با مقایسة رابطة $f_{XY}(x,y)$ با رابطة

چگالي دو متغیر تصادفي تواماً نرمال، داریم: $s_X^2=s_Y^2=1$ و $s_{XY}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. در نتیجه:

$$\boxed{C=\begin{pmatrix}1 & \sqrt{2}/2 & 0\\ \sqrt{2}/2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}}$$

پ) با حدف سطر و ستون مربوط به Y داریم:

$$C=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\ \rightarrow\ \boxed{f_{XZ}(x,z)=\frac{1}{2p}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}}$$

۲۳- (الف) ابتدا با فرض معلوم بودن Y حساب میکنیم و بعد نسبت به Y هم امید میگیریم.

$$E\{S\,|\,Y\}=\begin{cases}mY, & Y=1,2,\mathbf{L},n\\ 0, & Y=0\end{cases}=mY \qquad\Rightarrow\qquad E\{S\}=mE\{Y\}=mn\,p$$

$$E\{S^2\,|\,Y\}=\begin{cases}E(X_1+X_2+\mathbf{L}\,X_Y)^2, & Y=1,2,\mathbf{L},n\\ E\{0^2\}=0, & Y=0\end{cases}=\begin{cases}(s^2+m^2)Y+(m^2+r\,s^2)Y(Y-1), & Y=1,2,\mathbf{L},n\\ 0, & Y=0\end{cases}$$

$$=(s^2+m^2)Y+(m^2+r\,s^2)Y(Y-1)$$

$$E\{S^2\}=(s^2+m^2)E\{Y\}+(m^2+r\,s^2)E\{Y(Y-1)\}=(s^2+m^2)np+(m^2+r\,s^2)n(n-1)\,p^2$$

$$s_S^2=E\{S^2\}-(E\{S\})^2=s^2np+r\,s^2n(n-1)\,p^2$$

(ب) با فرض تواما نرمال بودن (با پوزش چون در صورت مساله تاکید نشده بود) از ناهمبسته بودن متغیر های تصادفی تواما مستقل بودنشان نتیجه میگردد. در اینجا هم ابتدا با فرض معلوم بودن Y امید میگیریم و بعد نسبت به Y هم امید میگیریم.

$$E\{\exp(jwS)\,|\,Y\}=\begin{cases}E\{\exp(jw(X_1+X_2+\mathbf{L}\,X_Y)),\ Y=1,2,\mathbf{L},n\\ E\{\exp(jw0)\}=1, \qquad Y=0\end{cases}=\begin{cases}E\{\prod_{i=1}^{Y}\exp(jwX_i)\},\ Y=1,2,\mathbf{L},n\\ 1, \qquad Y=0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\prod_{i=1}^{Y}E\{\exp(jwX_i)\},\ Y=1,2,\mathbf{L},n\\ 1, \qquad Y=0\end{cases}=(\exp(jmw-0.5s^2w^2))^Y$$

$$f_S(w)=E\{(\exp(jmw-0.5s^2w^2))^Y\}=\Gamma_Y(\exp(jmw-0.5s^2w^2))=[1-p+p\exp(jmw-0.5s^2w^2)]^n$$

۲۴- الف) چون X_i ها متغیرهاي تصادفي پواسون با $s_i^2=m_i$ هستند، پس $E\{X_i^2\}=m_i^2+m_i^2=2m_i^2$ و براي $i\neq j$ داريم: $E\{X_iX_j\}=m_im_j$. پس:

$$\boxed{R_X=E\{XX^T\}=\begin{pmatrix}2m_1^2 & m_1m_2 & m_1m_3\\ m_1m_2 & 2m_2^2 & m_2m_3\\ m_1m_3 & m_2m_3 & 2m_3^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2 & 3\\ 2 & 6 & 6\\ 3 & 6 & 12\end{pmatrix}}$$

ب) داريم: $\tilde{Y}_1=\tilde{X}_1$ ، $\tilde{Y}_2=\tilde{X}_2-\tilde{X}_1$ و $\tilde{Y}_3=\tilde{X}_3-\tilde{X}_2$ و لذا:

$$\boxed{C_Y=E\{\tilde{Y}\tilde{Y}^T\}=\begin{pmatrix}s_1^2 & 0-s_1^2 & 0-0\\ 0-s_1^2 & s_2^2+s_1^2 & -s_2^2\\ 0-0 & -s_2^2 & s_3^2+s_2^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 3 & -2\\ 0 & -2 & 5\end{pmatrix}}$$

ج)
$$\Gamma_Y(z)=E\{z_1^{Y_1}z_2^{Y_2}z_3^{Y_3}\}=E\{z_1^{X_1}z_2^{X_2-X_1}z_3^{X_3-X_2}\}=E\{(\frac{z_1}{z_2})^{X_1}(\frac{z_1}{z_2})^{X_2}z_3^2\}=E\{(\frac{z_1}{z_2})^{X_1}\}E\{(\frac{z_1}{z_2})^{X_2}\}E\{z_3^2\}$$

$$\rightarrow\quad \boxed{\Gamma_Y(z)=\Gamma_{X_1}(\frac{z_1}{z_2})\Gamma_{X_2}(\frac{z_2}{z_3})\Gamma_{X_2}(z_3)=e^{(\frac{z_1}{z_2}+2\frac{z_2}{z_3}+3z_3-6)}}$$

د)
$$\Pr\{Y_1=Y_2=Y_3=3\}=\Pr\{X_1=3\ ,\ X_2=6\ ,\ X_3=9\}=\Pr\{X_1=3\}\Pr\{X_2=6\}\Pr\{X_3=9\}$$

$$\rightarrow\quad \boxed{\Pr\{Y_1=Y_2=Y_3=3\}=e^{-6}\frac{1^3 2^6 3^9}{3!6!9!}=1.992\times10^{-6}}$$

۲۵- با توجه به روابط داده شده داريم: $Y_n=Y_{n-1}+nX_n$. ضمناً پيش‌آمد معلوم بودن Y_1 الي Y_n معادل است با معلوم بودن X_1 الي X_n. يعني:

$$A=\{X_1,X_2,\ldots,X_n\}\equiv\{Y_1,Y_2,\ldots,Y_n\}$$

الف) $$\boxed{E\{Y_n \mid A\} = E\{Y_{n-1} + nX_n \mid A\} = Y_{n-1} + nE\{X_n\} = Y_{n-1} + nm_n}$$

(Y_{n-1} طبق شرط A معلوم است. X_n مستقل از شرط A است.)

ب) $$Var(Y_n \mid A) = E\{(Y_n - E\{Y_n \mid A\})^2 \mid A\} = E\{(Y_n - Y_{n-1} - nm_n)^2 \mid A\} = E\{(nX_n - nm_n)^2 \mid A\}$$

$$= n^2 E\{(X_n - m_n)^2 \mid A\} = n^2 E\{(X_n - m_n)^2\} = n^2 s^2 \;\rightarrow\; \boxed{Var(Y_n \mid A) = n^2 s^2}$$

(X_n مستقل از شرط A است.)

پ) به‌دلیل استقلال $f_X(X) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i) = \prod_{i=1}^{n} f_i(x_i)$. بردار Y با بردار X رابطة خطي دارد. $Y = AX$ که در آن:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \mathbf{L} & 0 \\ 1 & 2 & & 0 \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{O} & \mathbf{M} \\ 1 & 2 & \mathbf{L} & n \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = (y_2 - y_1)/2 \\ \mathbf{M} \\ x_n = (y_n - y_{n-1})/n \end{cases}$$

در نتیجه: $$\boxed{f_Y(Y) = \frac{1}{|\det(A)|} f_X(A^{-1}Y) = \frac{1}{n!}\prod_{i=1}^{n} f_i((y_i - y_{i-1})/i)}$$

۲۶- $$Y_1 = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\} \;\rightarrow\; F_{Y_1}(y) = \Pr\{Y_1 \le y\} = \Pr\{X_1 \le y\ ,\ X_2 \le y\ , \ldots,\ X_n \le y\}$$

با توجه به استقلال X_i ها: $$\rightarrow\; F_{Y_1}(y) = \prod_{i=1}^{n} \Pr\{X_i \le y\} = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(y) = F_X^m(y)$$

$$\rightarrow\; \boxed{f_{Y_1}(y) = nF_X^{n-1}(y) f_X(y)}$$

$$Y_2 = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\} \;\rightarrow\; \Pr\{Y_2 > y\} = \Pr\{X_1 > y\ ,\ X_2 > y\ , \ldots,\ X_n > y\} = \prod_{k=1}^{n} \Pr\{X_k > y\}$$

$$F_{Y_2}(y) = \Pr\{Y_2 \le y\} = 1 - \prod_{k=1}^{n} \Pr\{X_i > y\} = 1 - [1 - F_X(y)]^n \;\rightarrow\; f_{Y_2}(y) = n[1 - F_X(y)]^{n-1} f_X(y)$$

$$Y_3 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \;\rightarrow\; \Phi_{Y_3}(s) = E\{e^{sY_3}\} = E\{e^{\frac{s}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k}\} = \prod_{k=1}^{n} E\{e^{\frac{s}{n}X_k}\} = \Phi_X^n\left(\frac{s}{n}\right) \;\rightarrow$$

$$\boxed{f_{Y_3}(y) = n^n \underbrace{f_X(ny) * f_X(ny) * \cdots * f_X(ny)}_{n \text{ times}}} \qquad \left[\Phi_X\left(\frac{s}{n}\right) \leftrightarrow nf_X(nx)\right]$$

۲۷-

$f_{Z_k}(z)dz = \Pr\{$ $k-1$ عدد از X_i ها بزرگتر از z ، $n-k$ عدد از X_i ها کوچکتر از z و یکي از آن‌ها در فاصلة z تا $z+dz$ $\}$

$$=\binom{n}{k-1}\binom{n-k+1}{n-k}\binom{1}{1}[1-f_X(z)]^{k-1}F_X^{n-k}(z)f_X(z)dz$$

$$\rightarrow \qquad \boxed{f_{Z_k}(z)=\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}F_X^{n-k}(z)[1-f_X(z)]^{k-1}f_X(z)}$$

حال چگالي توأم z_1 و z_n را به‌دست مي‌آوريم:

$f_{Z_1Z_n}(z_1,z_n)dz_1dz_n=\Pr\{$ ا z_n تا z_1 درفاصلة و بقيه z_n-dz_n تا z_n در فاصلة ، يكي z_1+dz_1 تا z_1 ها در فاصلة X_i يكي از$\}$

همچنين، مقدار $f_{Z_1Z_n}(z_1,z_n)$ اگر $z_n>z_1$ برابر با صفر است. در نتيجه:

$$f_{Z_1Z_n}(z_1,z_n)=\begin{cases} n(n-1)f_X(z_1)f_X(z_n)[f_X(z_1)-f_X(z_n)]^{n-2} & z_1>z_n \\ 0 & z_1<z_n \end{cases}$$

$$F_Z(z)=\Pr\{z_1-z_n\le z\}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{z+z_n}f_{Z_1Z_n}(z_1,z_n)dz_1dz_n$$

$$=\begin{cases} n(n-1)\int_{-\infty}^{\infty}f_X(z_n)\int_{z_n}^{z_n+z}f_X(z_1)[F_X(z_1)-F_X(z_n)]^{n-2}dz_1dz_n \ , \ z\ge 0 \\ 0 \quad , \quad z<0 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} n\int_{-\infty}^{\infty}f_X(z_n)\{[F_X(z+z_n)-F_X(z_n)]^{n-1}-\underbrace{[F_X(z_n)-F_X(z_n)]^{n-1}}_{=0}\}dz_n \ , \ z\ge 0 \\ 0 \quad , \quad z<0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \qquad \boxed{f_Z(z)=\frac{d}{dz}F_z(z)=\begin{cases} n(n-1)\int_{-\infty}^{\infty}f_X(z_n)f_X(z+z_n)\{[F_X(z+z_n)-F_X(z_n)]^{n-2}dz_n \ , \ z\ge 0 \\ 0 \quad , \quad z<0 \end{cases}}$$

-۲۸

$$C_X=R_X-m_Xm_X^T=\begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

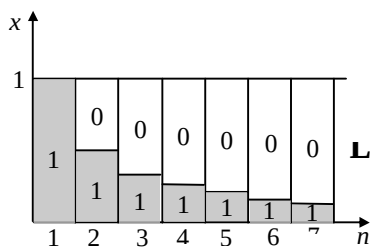
با توجه به اين‌كه: $\det(C_X)=6-2-4=0$ وابستگي خطي بين X_1,X_2,X_3 وجود دارد. بردار ويژة متناظر با مقدار ويژة صفر رابطة خطي را به‌دست مي‌دهد.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix}=0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} V_1-V_3=0 \\ V_2-V_3=0 \\ -V_1+2V_2+3V_3=0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad V_1=V_2=V_3=k$$

$$k(X_1-2)+k(X_2+1)+k(X_3-0)=0 \quad \rightarrow \quad \boxed{X_1+X_2+X_3=1}$$

-۲۹

الف) در کلية نقاط $x<\frac{1}{2}$ رشتة $\{10101...\}$ و در کلية نقاط $x>\frac{1}{2}$ رشتة $\{01010...\}$ و در $x=\frac{1}{2}$ رشتة $\{00000...\}$ را داريم. واضح است در همه‌جا بجز $x=\frac{1}{2}$ رشته‌ها نوساني هستند، پس همگرايي‌هاي e و ae نداريم. اگر با توجه به تشابه نقاط Ω فرض کنيم $X(x)=\begin{cases}0 & x=\frac{1}{2}\\ a & Otherwise\end{cases}$، مقدار احتمال $\Pr\{|X_n-X|\geq e\}$ مستقل از n و مخالف صفر است. (به‌ازاي $a\neq 0,1$ برابر با يک و به ازاي $a=0$ يا 1 برابر با $\frac{1}{2}$ است.) پس همگرايي p و در نتيجه ms نداريم ولي چون $f_{X_n}(x)=\frac{1}{2}d(x)+\frac{1}{2}d(x-1)$ مستقل از n است، حد آن هم خودش مي‌شود و همگرايي در توزيع داريم.

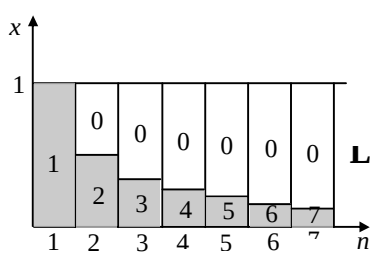


ب) با توجه به شکل روبرو که به‌طور شماتيک رشته‌هاي نقاط مختلف فضاي $\Omega=[0,1]$ را نشان مي‌دهد، واضح است که در همه‌جا، e، همگرايي به

$$X(x)=\begin{cases}0 & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$$

داريم. با همگرايي e، همگرايي هاي ae، p و $dist$ نتيجه مي‌شود. ضمناً در توزيع به $f_X(x)=d(x)$ همگرا مي‌گردد($\Pr\{X=1\}=0$ است). همگرايي در ms هم داريم، زيرا:

$$E\{(X_n-X)^2\}=(1-\frac{1}{n})\times 0^2+\frac{1}{n}\times 1^2=\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

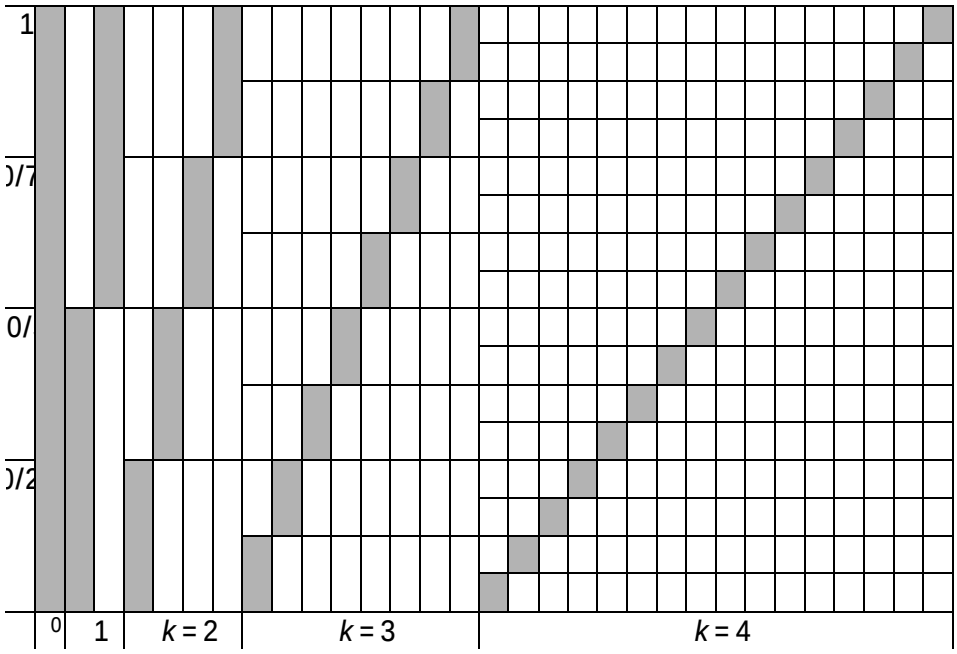


پ) در اينجا نيز با توجه به شکل روبرو واضح است که بجز در $x=0$ در بقية نقاط همگرايي به $X(x)=0$ داريم. در $x=0$ چون همواره $X_n(0)=n$ همگرايي نداريم. پس همگرايي e نداريم اما چون $\Pr\{x=0\}=0$، همگرايي ae و در نتيجه p و $dist$ داريم. در اينجا هم نظير بند (ب) همگرايي توزيع به $f_X(x)=d(x)$ است. ولي در اينجا همگرايي در ms نداريم، چون:

$$E\{(X_n-X)^2\}=(1-\frac{1}{n})\times 0^2+\frac{1}{n}\times n^2=n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

ت) در شکل زير ناحيه‌هاي خاکستري، ناحيه‌هايي هستند که در آن‌ها $X_n(x)=1$ و در ساير نقاط $X_n(x)=0$ است.

1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	n



همان‌طور كه مشاهده مي‌شود، در هيچ‌جاي فضاي نمومه رشتة همگرا نداريم ولي همگرايي در احتمال داريم. چون با در نظر گرفتن متغير تصادفي حدي $X(x)=0$ داريم:

$$\Pr(A_n)=\Pr\{|X_n-X|\geq e\}=2^{-k}\xrightarrow[\equiv k\to\infty]{n\to\infty}0\qquad\forall 0<e<1$$

به‌دليل همگرايي در احتمال، همگرايي در توزيع نيز داريم و حد توزيع (pdf) به‌صورت $f_X(x)=d(x)$ است.

همگرايي در ms هم داريم، چون با تعريف متغير تصادفي حدي $X(x)=0$ داريم:

$$E\{(X_n-X)^2\}=E\{X_n^2\}=0^2\times(1-2^{-k})+1^2\times 2^{-k}=2^{-k}\xrightarrow[\equiv k\to\infty]{n\to\infty}0$$